SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Finaltävling i Stockholm den 23 november 2013

1. För $r > 0$, beteckna med B_r mängden av punkter som ligger högst r längdenheter från origo. Om P_r är mängden av de punkter i B_r som har heltalskoordinater, visa att ekvationen
$$xy^3z + 2x^3z^3 - 3x^5y = 0$$
har ett udda antal lösningar (x, y, z) i P_r.

2. Pappersvikningskonsten *origami* utförs oftast med kvadratiska pappersark. Man viker arket en gång utefter en linje genom arkets centrum så att man får en niohörning. Låt p vara niohörningens omkrets minus längden av vecket, d.v.s. den sammanlagda längden av de åtta sidor som inte är veck, och beteckna med s den ursprungliga kvadratens sidlängd. Uttryck arean av niohörningen med hjälp av p och s.

3. Bestäm alla primtal p samt alla icke-negativa heltal m och n, sådana att
$$1 + p^n = m^3.$$

4. En robotgräsklippare är placerad i mitten av en stor gräsmatta. På grund av ett fabrikationsfel kan roboten endast röra sig rakt fram och svänga i riktningar som är multiplar av $60°$. Ett staket ska sättas upp så att det avgränsar hela den del av gräsmattan som roboten kan ta sig till genom att färdas längs en kurva med längd högst 10 meter från sitt utgångsläge, givet att den är vänd mot norr när den startar. Hur långt måste staketet vara?

5. Låt $n \geq 2$ vara ett positivt heltal. Visa att det finns exakt $2^{n-3}n(n-1)$ n-tupler av heltal $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, som uppfyller villkoren

(i) $a_1 = 0$;

(ii) för varje m, $2 \leq m \leq n$, finns ett index i_m, $1 \leq i_m < m$, sådant att $|a_{i_m} - a_m| \leq 1$;

(iii) n-tupeln $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ innehåller exakt $n-1$ olika tal.

6. Låt a, b, c vara reella tal sådana att
$$a^2b^2 + 18abc > 4b^3 + 4a^3c + 27c^2.$$
Visa att $a^2 > 3b$.

Skrivtid: 5 timmar
Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!