SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Finaltävling i Göteborg den 22 november 2014

1. Bestäm alla polynom p med icke-negativa heltalskoefficienter sådana att $p(1) = 7$ och $p(10) = 2014$.

2. Tre cirklar som tangerar varandra utvändigt har alla sina medelpunkter på en fjärde cirkel med radie R. Visa att de tre cirkelskivornas sammanlagda area är mindre än $4\pi R^2$.

3. Bestäm alla funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sådana att

$$f(f(x + y) - f(x - y)) = xy,$$

för alla reella x och y.

4. En kvadrat är sönderklippt i ändligt många trianglar på ett godtyckligt sätt. Visa att summan av diametrarna till de inskrivna cirklarna i dessa trianglar är större än kvadratens sidlängd.

5. I nästa års final i Skolornas matematiktävling deltar 20 finalister. Finalskrivningen innehåller sex problem. Emil påstår att det oavsett resultat måste finnas fem tävlande och två problem sådana att antingen alla de fem tävlande löser båda problemen, eller ingen av dem löser något av de två problemen. Har han rätt?

6. Bestäm alla udda primtal p och q sådana att ekvationen

$$x^p + y^q = pq$$

har minst en lösning (x, y), där x och y är positiva heltal.

Skrivtid: 5 timmar
Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!