

SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Finaltävling i Linköping den 20 november 2021

1. I en triangel bildar både sidorna och vinklarna aritmetiska följder. Bestäm triangelns vinklar.

2. Anna är ute och handlar frukt. Hon observerar att fyra apelsiner, tre bananer och en citron kostar precis lika mycket som tre apelsiner och två citroner (alla priser är i hela kronor). Precis då ringer hennes kompis Bengt, och Anna berättar detta för honom. Bengt klagar, ”den informationen räcker inte för att jag ska veta hur mycket varje frukt kostar”.

”Nej”, säger Anna, ”men tre apelsiner och två citroner kostar lika många kronor som din mamma är gammal¹. Tyvärr räcker det inte heller, men om hon hade varit yngre så hade informationen varit tillräcklig för att du ska kunna räkna ut vad frukterna kostar.”

Hur gammal är Bengts mamma?

3. Fyra mynt är utlagda på ett bord, så att de bildar hörnen i en kvadrat. Ett *drag* består av att flytta ett av mynten genom att låta det hoppa över ett av de andra mynten så att det hamnar på den direkt motsatta sidan det andra myntet, lika långt ifrån som det var innan draget gjordes. Går det att göra ett antal drag så att mynten hamnar i hörnen av en kvadrat med annan sidlängd än den ursprungliga kvadraten?

4. Ge exempel på en funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller

$$0 < f(x) < f(x + f(x)) < \sqrt{2}x, \quad \text{för alla positiva } x,$$

samt visa att det inte finns någon funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller

$$x < f(x + f(x)) < \sqrt{2}f(x), \quad \text{för alla positiva } x.$$

5. Låt n vara ett positivt heltal som är kongruent med 1 modulo 4. Xantippa har en säck med $n + 1$ bollar numrerade från 0 till n . Hon drar en boll (slumpmässigt, likafördelat) ur säcken och läser av dess nummer: k , säg. Hon behåller bollen och plockar sedan upp ytterligare k bollar ur säcken (slumpmässigt, likafördelat, utan återläggning). Slutligen summerar hon talen på alla de $k + 1$ bollarna hon plockat upp. Vad är sannolikheten att summan blir udda?

6. Hitta det största positiva heltalet som inte kan skrivas på formen $a + bc$ för några positiva heltal a , b , c , som uppfyller $a < b < c$.

Skrivtid: 5 timmar

Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!

¹räknat i år