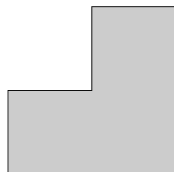


SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING  
Svenska matematikersamfundet

*Finaltävling i Göteborg den 19 november 2022*

1. Vilka storlekar av kvadrater med heltalssidor kan täckas helt utan överlapp av likadana kakelplattor som består av tre kvadrater med sidan 1 som sitter ihop i en L-form?



2. Finn alla funktioner  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sådana att

$$f(x + zf(y)) = f(x) + zf(y),$$

för alla  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .

3. Låt  $n$  vara ett positivt heltal som är delbart med 39. Vilken är den minsta möjliga siffersumma som  $n$  kan ha (i bas 10)?

4. Låt  $ABC$  vara en spetsvinklig triangel. Låt  $I$  vara en punkt inuti triangeln och låt  $D$  vara en punkt på sträckan  $AB$ . Linjen genom  $D$  som är parallell med  $AI$  skär linjen  $AC$  i punkten  $E$ , och linjen genom  $D$  som är parallell med  $BI$  skär linjen  $BC$  i punkten  $F$ . Visa att

$$\frac{EF \cdot CI}{2} \geq \text{area}(\triangle ABC).$$

5. Visa att det för varje par av positiva heltal  $k$  och  $n$  finns heltal  $x_1, x_2, \dots, x_k$  med  $0 \leq x_j \leq 2^{k-1} \cdot \sqrt[k]{n}$  för  $j = 1, 2, \dots, k$ , och sådana att

$$x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \dots + x_k^k = n.$$

6. Bengt vill sätta ut kryss och ringar i rutorna i en  $n \times n$ -kvadrat, så att det är exakt en ring och exakt ett kryss i varje rad och i varje kolumn, och inte mer än en symbol i varje ruta. Mona vill stoppa honom, genom att på förhand sätta ut ett antal förbud mot kryss och ett antal förbud mot ring, högst ett förbud i varje ruta. Hon vill använda så få förbud som möjligt av varje sort. För att lyckas hindra Bengt, hur många förbud behöver hon som minst använda av den sorts förbud hon använder flest av?

Skrivtid: 5 timmar

Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!