SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Finaltävling i Stockholm den 23 november 2019

1. Syskonen Robb, Arya och Sansa har av en okänd givare fått sju förseglade påsar med varierande antal pärlor. På sex av påsarna finns etiketter som anger antalet pärlor: 7, 9, 11, 13, 15, 18, men den sjunde påsen saknar etikett. Givaren har ställt vissa krav: Robb ska ha tre påsar och hans systrar två påsar var. Dessutom ska Arya ha påsen som innehåller 7 pärlor. Påsarna ska fördelas så att vart och ett av syskonen får lika många pärlor (detta är möjligt enligt givaren).

Hur många pärlor finns det i påsen utan etikett, hur många pärlor finns det totalt och hur ska påsarna fördelas?

2. Sträckan AB är diameter i en cirkel. Punkterna C och D ligger på cirkeln. Strålarna AC och AD skär tangenten till cirkeln i punkten B i punkter P och Q, respektive. Visa att punkterna C, D, P och Q ligger på en cirkel.

3. Det står två skålar på ett bord, en vit och en svart. I den vita skålen ligger 2019 kulor. Spelare A och B spelar ett spel där de gör vartannat drag (A börjar). Ett drag består av

- att flytta en eller flera kulor från den ena skålen till den andra, *eller*
- att ta bort en kula från den vita skålen,

med villkoret att den uppkomna positionen (det vill säga antalet kulor i de två skålarna) inte har förekommit tidigare. Den spelare som inte har något giltigt drag att göra förlorar.

Kan någon av spelarna vara säker på att vinna? I så fall vilken?

4. Låt Ω vara en cirkelskiva med radie 1. Bestäm det minsta r som har följande egenskap: Det går att välja tre punkter på Ω så att varje cirkelskiva som ligger i Ω och har radie större än r innehåller minst en av de tre punkterna.

5. Låt f vara en funktion som är definierad för alla positiva heltal och vars värden är positiva heltal. För f gäller dessutom att $f(n+1) > f(n)$ och $f(f(n)) = 3n$, för varje positivt heltal n. Beräkna $f(2019)$.

6. Finns det en oändlig följd av positiva heltal $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ som innehåller varje positivt heltal exakt en gång och som är sådan att talet $a_n + a_{n+1}$ är en kvadrat för varje n?

Skrivtid: 5 timmar
Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!