SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 1 oktober 2019

1. Anne, Charlotte och Emily springer längs en rak väg, var och en med konstant hastighet. Anne är snabbast av de tre och Emily är långsammast. De tre startar vid skilda tidpunkter. Vid ett tillfälle befinner sig Anne 100 m bakom Charlotte, som i sin tur är 200 m bakom Emily. Efter en stund är Anne sida vid sida med Charlotte och de båda har 120 m kvar fram till Emily. Så småningom hinner Charlotte ikapp Emily. Vad är avståndet från dem till Anne vid den tidpunkten?

2. Punkterna A, B, C och D ligger på en cirkel. Sträckorna AB och CD skär varandra och är vinkelräta mot varandra. Givet att $|AB| = 11\,\text{cm}$ och $|CD| = 10\,\text{cm}$, samt att $|BD| = 2|AC|$, bestäm längden av sträckan BD.

3. Ett antal ekvationer $E(1), E(2), \ldots, E(n)$ i variabeln x definieras successivt enligt regeln att

$$E(1): \quad x^2 + bx + c = 0, \quad \text{och} \qquad E(k+1): \quad x^2 + s_k x + t_k = 0,$$

om $E(k)$ har två olika reella lösningar s_k, t_k, där $s_k > t_k$. Om $E(k)$ inte har två olika reella lösningar avstannar processen.

Finn b och c så att $E(2019)$ kan definieras och har lösningarna $s_{2019} = 1$ och $t_{2019} = -2$.

4. Sträckan AB är diameter i en cirkel med radie R. Punkten P ligger på diametern AB. Fyrhörningen $PBCD$ är en rektangel sådan att linjen CD (det vill säga linjen genom C och D) är en tangent till cirkeln. Sträckan DP skär cirkeln i punkten Q. Givet att $|QB| = 6\,\text{cm}$,

(a) ange det minsta R_0 så att konstruktionen är möjlig för alla $R \geq R_0$;

(b) visa att arean av rektangeln $PBCD$ för $R \geq R_0$ är oberoende av R och beräkna denna area.

5. På en tavla står 16 heltal, inte nödvändigtvis olika, sådana att minst ett av dem inte är delbart med 17. Ett *drag* består i att man raderar två av talen, a och b, och ersätter dem med talen $3a - 2b$ och $7a - 4b$, så att det återigen står 16 tal på tavlan.

(a) Visa att man alltid kan göra ett antal drag som leder till att inget av de 16 talen på tavlan är delbart med 17.

(b) Kan man alltid göra ett antal drag som leder till att summan av alla 16 talen på tavlan är delbar med 17?

6. Låt n vara ett positivt heltal och betrakta ett $n \times n$ schackbräde. Ett $m \times m$ *delbräde* är en kvadrat på schackbrädet som består av m^2 rutor och som helt ligger i m på varandra följande rader och i m på varandra följande kolumner. Vilket är det minsta positiva heltal m som är sådant att man kan sätta ut n icke-attackerande torn på brädet (det vill säga exakt ett torn i varje rad och exakt ett i varje kolumn) så att minst ett torn står i varje $m \times m$ delbräde?

Skrivtid: 5 timmar
Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!
Lösningarna kommer att finnas utlagda på www.mattetavling.se efter den 5 november.