SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 1 oktober 2019 - lösningar

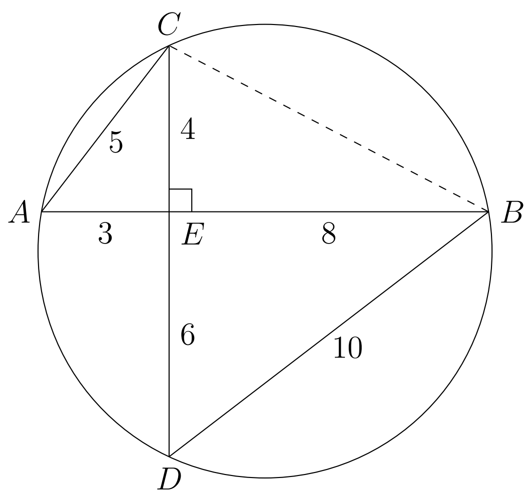
1. Anne, Charlotte och Emily springer längs en rak väg, var och en med konstant hastighet. Anne är snabbast av de tre och Emily är långsammast. De tre startar vid skilda tidpunkter. Vid ett tillfälle befinner sig Anne 100 m bakom Charlotte, som i sin tur är 200 m bakom Emily. Efter en stund är Anne sida vid sida med Charlotte och de båda har 120 m kvar fram till Emily. Så småningom hinner Charlotte ikapp Emily. Vad är avståndet från dem till Anne vid den tidpunkten?

Lösning. Låt oss betrakta hastigheterna för Anne och Charlotte relativt Emilys hastighet. Vid det första tillfället hade Anne 300 m och Charlotte 200 m fram till Emily. Vid det andra tillfället, när Anne hunnit ikapp Charlotte, hade de båda 120 m fram till Emily, det vill säga Anne hade sprungit 180 m samtidigt som Charlotte sprungit 80 m relativt Emily. När Charlotte är jämsides med Emily har hon sprungit 120 m relativt Emily. Om Anne på samma tid har sprungit x m har vi sambandet

$$\frac{x}{120} = \frac{180}{80},$$

som ger $x = 270$, det vill säga Anne är nu 150 m före Charlotte.

2. Punkterna A, B, C och D ligger på en cirkel. Sträckorna AB och CD skär varandra och är vinkelräta mot varandra. Givet att $|AB| = 11$ cm och $|CD| = 10$ cm, samt att $|BD| = 2|AC|$, bestäm längden av sträckan BD.



Lösning. Låt P vara de två givna kordornas skärningspunkt. Vinklarna $\angle BDP$ och $\angle CAP$ är lika, som randvinklar stående på samma båge i cirkeln. Det följer att de två rätvinkliga trianglarna $\triangle BPD$ och $\triangle CPA$ är likformiga (vinkel-vinkel). För deras sidlängder betyder det att

$$\frac{|BD|}{|AC|} = \frac{|BP|}{|CP|} = \frac{|DP|}{|AP|} = 2.$$

eftersom det var givet att $|BD| = 2|AC|$. Beteckna $x = |BP|$, och $y = |CP|$. Proportionerna ovan samt de givna sträcklängderna ger då ekvationssystemet

$$\frac{x}{y} = \frac{10-y}{11-x} = 2,$$

så att $x = 2y$, och $10 - y = 22 - 2x$. Lösningen till ekvationssystemet är $x = 8\,\text{cm}$ och $y = 4\,\text{cm}$. Pythagoras sats, tillämpad på triangeln BPD, ger

$$|BD|^2 = |BP|^2 + |DP|^2 = x^2 + (10-y)^2 = 64 + 36 = 100\,\text{cm}^2,$$

så att $|BD| = 10\,\text{cm}$.

3. Ett antal ekvationer $E(1), E(2), \ldots, E(n)$ i variabeln x definieras successivt enligt regeln att

$$E(1): \quad x^2 + bx + c = 0, \quad \text{och} \qquad E(k+1): \quad x^2 + s_k x + t_k = 0,$$

om $E(k)$ har två olika reella lösningar s_k, t_k, där $s_k > t_k$. Om $E(k)$ inte har två olika reella lösningar avstannar processen.

Finn b och c så att $E(2019)$ kan definieras och har lösningarna $s_{2019} = 1$ och $t_{2019} = -2$.

Lösning. Ekvationen $E(2019)$ har lösningarna $s_{2019} = 1$ och $t_{2019} = -2$. Det betyder att

$$E(2019): \quad (x-1)(x-(-2)) = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2 = 0.$$

Enligt beskrivningen av hur ekvationerna bildas betyder det att lösningarna till $E(2018)$ också måste vara $s_{2018} = 1$ och $t_{2018} = -2$, det vill säga ekvationerna $E(2019)$ och $E(2018)$ är i själva verket precis samma ekvation. Genom att backa på samma sätt ytterligare 2017 gånger får vi att

$$E(1): \; x^2 + x - 2 = 0,$$

det vill säga vi kan välja $b = 1$ och $c = -2$. (I själva verket har vi även visat att det är den enda möjligheten för b och c.)

4. Sträckan AB är diameter i en cirkel med radie R. Punkten P ligger på diametern AB. Fyrhörningen $PBCD$ är en rektangel sådan att linjen CD (det vill säga linjen genom C och D) är en tangent till cirkeln. Sträckan DP skär cirkeln i punkten Q. Givet att $|QB| = 6\,\text{cm}$,

(a) ange det minsta R_0 så att konstruktionen är möjlig för alla $R \geq R_0$;

(b) visa att arean av rektangeln $PBCD$ för $R \geq R_0$ är oberoende av R och beräkna denna area.

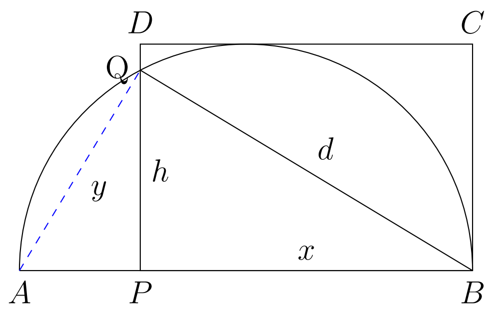
Lösning. (a) Sträckan QB är korda i cirkeln, vilket betyder att $|QB| = 6 \leq 2R$, och $R \geq 3\,\mathrm{cm}$. För $R = 3$ är konstruktionen möjlig, i det fallet har vi $A = P = Q$. Vi visar nu att konstruktionen är möjlig för alla $R > 3\,\mathrm{cm}$. Dra en cirkel med medelpunkt i B och radie $6\,\mathrm{cm}$. Denna kommer att skära den givna cirkeln i två punkter, eftersom $2R > 6$. Kalla en av skärningspunkterna Q. Dra normalen genom Q till linjen AB, kalla skärningspunkten mellan AB och normalen P. Dra en normal till AB genom cirkelns medelpunkt. Låt E vara den av denna normals skärningspunkter med cirkeln som befinner sig på samma sida om AB som Q. Dra tangenten till cirkeln genom E. Denna tangent är parallell med AB och skär linjen PQ i punkten D, och den skär tangenten till cirkeln i B i punkten C. Rektangeln $PBCD$ uppfyller villkoren i uppgiften.

(b) Rektangeln $PBCD$ har area $|PB| \cdot |BC|\,\mathrm{cm}^2$. Längden av sträckan BC är lika med avståndet mellan de räta linjerna AB och CD. Eftersom båda linjerna CD och AB är vinkelräta mot BC, är de parallella med varandra. Radien i tangeringspunkten mellan cirkeln och CD måste då vara vinkelrät även mot AB, vilket betyder att avståndet mellan linjerna AB och CD är R. Därmed gäller $|BC| = R$, och arean av rektangeln $BCDP$ är $R \cdot |PB|\,\mathrm{cm}^2$.

Vinkeln $\angle AQB$ är rät, eftersom den står på en halvcirkel. Sträckan QP är vinkelrät mot AB. Trianglarna ABQ och QBP är därmed likformiga (vinkel-vinkel), och vi har

$$\frac{|QB|}{|AB|} = \frac{|QB|}{2R} = \frac{|PB|}{|QB|}.$$

Vi får att $|QB|^2 = 2R \cdot |PB| = 36\,\mathrm{cm}^2$, och den sökta arean är därmed $18\,\mathrm{cm}^2$, oberoende av radien R.



Alternativ lösning. Sätt $x = |PB|$, $y = |AQ|$, $h = |PQ|$ och $d = |QB|$. Vinkeln $\angle AQB = 90°$, så vi har följande likheter:

$$x^2 + h^2 = d^2 \qquad \text{(Pythagoras sats)}$$
$$h^2 + (2R - x)^2 = y^2 \qquad \text{(Pythagoras sats)}$$

Dessutom är $y^2 + d^2 = 4R^2$, det vill säga

$$4R^2 = h^2 + (2R - x)^2 + x^2 + h^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2Rx = h^2 + x^2 = d^2.$$

Rektangelns area blir alltså $Rx = \dfrac{d^2}{2} = 18\,\mathrm{cm}^2$, oberoende av R.

5. På en tavla står 16 heltal, inte nödvändigtvis olika, sådana att minst ett av dem inte är delbart med 17. Ett *drag* består i att man raderar två av talen, a och b, och ersätter dem med talen $3a - 2b$ och $7a - 4b$, så att det återigen står 16 tal på tavlan.

(a) Visa att man alltid kan göra ett antal drag som leder till att inget av de 16 talen på tavlan är delbart med 17.

(b) Kan man alltid göra ett antal drag som leder till att summan av alla 16 talen på tavlan är delbar med 17?

Lösning. (a) Om talet b inte är delbart med 17 men a är delbart med 17, så är varken $3a - 2b$ eller $7a - 4b$ delbara med 17, eftersom 17 är ett primtal. Det betyder att efter upp till 15 drag kan vi anta att inget av talen är delbart med 17.

(b) Ja, det kan man.

I beviset utgår vi från att dragen från (a) gjorts, så att inget av talen på tavlan är delbart med 17. Likhet i resten av lösningen betyder likhet modulo 17, även när det inte omtalas explicit. Notera att om $a = b \pmod{17}$ så är $3a-2b = a$ och $7a-4b = 3a$, så att bara ett av talen ändras (mod 17). När n varierar går 3^n igenom alla (nollskilda) restklasser mod 17 (vi har $3^1 = 3,\ 3^2 = 9,\ 3^3 = -7,\ 3^4 = -4,\ 3^5 = 5,\ 3^6 = -2,\ 3^7 = -6, 3^8 = -1$; att vi fick -1 betyder att vi efter fortsatt multiplikation med 3 får samma åtta rester med motsatt tecken, och därmed får vi alla sexton). Eftersom a är lika med någon potens av 3 mod 17 kommer även $3^n a$ att gå igenom alla rester mod 17. Vi kan nu göra så att varje restklass är representerad på tavlan exakt en gång på följande sätt:

Om alla tal redan är olika mod 17, så är vi klara. Om det finns två tal i samma restklass, så måste det finnas en restklass som inte är representerad. Vi gör draget ovan, vilket multiplicerar den ena representanten med 3. Om restklassen $3a$ redan är representerad kan vi upprepa draget, vilket ger restklassen $9a$. Vi upprepar proceduren tills vi landar i en restklass som tidigare inte hade någon representant. Vi kommer garanterat att hamna i en sådan klass, eftersom multiplikation med 3 på sikt ger alla restklasser. När varje restklass finns representerad på tavlan exakt en gång ser vi att

$$(1 + 16) + (2 + 15) + \cdots + (8 + 9) = 0 \pmod{17},$$

det vill säga summan av de sexton talen är delbar med 17.

6. Låt n vara ett positivt heltal och betrakta ett $n \times n$ schackbräde. Ett $m \times m$ *delbräde* är en kvadrat på schackbrädet som består av m^2 rutor och som helt ligger i m på varandra följande rader och i m på varandra följande kolumner. Vilket är det minsta positiva heltal m som är sådant att man kan sätta ut n icke-attackerande torn på brädet (det vill säga exakt ett torn i varje rad och exakt ett i varje kolumn) så att minst ett torn står i varje $m \times m$ delbräde?

Lösning. Först visar vi att om $m^2 < n$, så är det omöjligt att sätta ut n torn på det angivna sättet. Antag nämligen att $n = m^2 + k$, $k > 0$. Dela in brädets rutor utom de sista k raderna och kolumnerna i m rader och m kolumner av disjunkta $m \times m$-kvadrater. Om varje sådan kvadrat innehåller minst ett torn, finns bara k torn kvar till de sista k raderna och kolumnerna. Det betyder att alla torn i de sista k raderna också står i de sista k kolumnerna. Med ett speglat argument måste dock tornen i de sista k raderna samtidigt också stå i de första k kolumnerna, vilket inte är möjligt att åstadkomma.

Nu visar vi att om $m^2 = n$, så är det möjligt. Identifiera brädet med heltalspunkterna (x, y), $0 \le x, y \le m^2 - 1$. Givet heltal q och r, definiera en punkt $P(q, r) = (qm + r, rm + q)$. Observera att $\{P(q, r) \mid 0 \le q, r \le m - 1\}$ är en uppsättning av $n = m^2$ icke-attackerande torn.

Tag en godtycklig $m \times m$-kvadrat på brädet, säg

$$K_{x,y} = \{(x + i, y + j) \mid 0 \le i, j \le m - 1\}$$

där $0 \le x, y \le m^2 - m$. Låt oss konstruera (q, r) så att $P(q, r) \in K_{x,y}$. Antag att $x = \alpha m + \beta$ och $y = \gamma m + \delta$ där $0 \le \alpha, \beta, \gamma, \delta \le m - 1$. Definiera

$$(q, r) = \begin{cases} (\gamma, \alpha) & \text{om } \beta \le \gamma \text{ och } \delta \le \alpha, \\ (\gamma + 1, \alpha) & \text{om } \beta \le \gamma \text{ och } \delta > \alpha, \\ (\gamma, \alpha + 1) & \text{om } \beta > \gamma \text{ och } \delta \le \alpha, \\ (\beta, \alpha) & \text{om } \beta = \gamma + 1 \text{ och } \delta > \alpha, \\ (\gamma, \delta) & \text{om } \beta > \gamma + 1 \text{ och } \delta = \alpha + 1, \\ (\gamma + 1, \alpha + 1) & \text{om } \beta > \gamma + 1 \text{ och } \delta > \alpha + 1. \end{cases}$$

För att slutföra beviset behöver vi visa att $P(q, r) - (x, y) = (i, j)$ för $0 \le i, j \le m - 1$. Vi betraktar de sex fallen i definitionen av (r, q) i den ovan givna ordningen:

$$P(q, r) - (x, y) = \begin{cases} (\gamma - \beta, \alpha - \delta) & \text{om } \beta \le \gamma \text{ och } \delta \le \alpha, \\ (\gamma + 1 - \beta, m + \alpha - \delta) & \text{om } \beta \le \gamma \text{ och } \delta > \alpha, \\ (m + \gamma - \beta, \alpha + 1 - \delta) & \text{om } \beta > \gamma \text{ och } \delta \le \alpha, \\ (0, m + \alpha - \delta) & \text{om } \beta = \gamma + 1 \text{ och } \delta > \alpha, \\ (m + \gamma - \beta, 0) & \text{om } \beta > \gamma + 1 \text{ och } \delta = \alpha + 1, \\ (m + 1 + \gamma - \beta, m + 1 + \alpha - \delta) & \text{om } \beta > \gamma + 1 \text{ och } \delta > \alpha + 1. \end{cases}$$

Man kontrollerar omedelbart att alla de ingående koordinaterna ligger i intervallet $[0, m - 1]$; det enda som kräver lite eftertanke är att $\gamma + 1 - \beta \le m - 1$ i andra fallet och att $\alpha + 1 - \delta \le m - 1$ i tredje fallet. Sistnämnda följer eftersom $\alpha = m - 1$ medför $\beta = 0$ för att $K_{x,y}$ ska rymmas inom brädet, men $\beta = 0$ är inte förenligt med $\beta > \gamma$, varför vi måste ha $\alpha < m - 1$ i tredje fallet. Ett likartat argument visar att $\gamma < m - 1$ i andra fallet. Beviset är klart.

Om $m^2 > n$ är det förstås också möjligt; tag en konstruktion som duger för $m^2 \times m^2$-brädet och betrakta bara de första n raderna och kolumnerna (eventuellt står det för få torn där, men då fyller vi i fler torn på godtyckligt sätt tills vi har n stycken).

Svar: $m = \left\lceil \sqrt{n} \right\rceil$.