SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Finaltävling i Stockholm den 23 november 2019

1. Syskonen Robb, Arya och Sansa har av en okänd givare fått sju förseglade påsar med varierande antal pärlor. På sex av påsarna finns etiketter som anger antalet pärlor: 7, 9, 11, 13, 15, 18, men den sjunde påsen saknar etikett. Givaren har ställt vissa krav: Robb ska ha tre påsar och hans systrar två påsar var. Dessutom ska Arya ha påsen som innehåller 7 pärlor. Påsarna ska fördelas så att vart och ett av syskonen får lika många pärlor (detta är möjligt enligt givaren).

Hur många pärlor finns det i påsen utan etikett, hur många pärlor finns det totalt och hur ska påsarna fördelas?

Lösning. Sammanlagda antalet pärlor i de sex första påsarna är 73. Eftersom det totala antalet pärlor ska vara delbart med 3, måste antalet i den sjunde påsen vara något tal i serien $2, 5, 8, \dots$. Det betyder också att varje syskon får minst 25 pärlor.

Det finns nu två möjligheter: Om Robb får den sjunde påsen, utan etikett, så finns systrarnas fyra påsar bland de sex första påsarna. Om en av systrarna har den sjunde påsen så finns den andra systerns två påsar och Robbs tre påsar bland de sex första påsarna.

I det första fallet ska det då gå att hitta två par av påsar bland de sex första med samma parsumma. I det andra fallet ska det finnas ett par och en trippel av påsar bland de sex första så att parsumman är lika med trippelsumman.

Vi har 15 möjliga parsummor: $7 + 9 = 16, 7 + 11 = 18$, 20, 22, 25, 20, 22, 24, 27, 24, 26, 29, 28, 31, 33. Eftersom vi kan utesluta de summor som understiger 25, återstår $25, 26, 27, 28, 29, 31, 33$. Men alla dessa summor är olika, vilket betyder att det första fallet inte kan gälla.

Någon av systrarna måste alltså ha den sjunde påsen. Parsumman för den andra systern ska då vara lika med trippelsumman för brodern. Men enligt förutsättningarna räcker det att studera tripplar bildade av talen 9, 11, 13, 15, 18. Vi ser direkt att den minsta möjliga trippelsumman är $9 + 11 + 13 = 33$ och den största möjliga parsumman är 33. Enda sättet att åstadkomma detta är att Arya får två påsar med 7 och 26 pärlor, dvs Arya får den sjunde påsen som alltså innehåller 26 pärlor, att Robb får tre påsar med 9, 11 och 13 pärlor, medan Sansa får de två återstående, med 15 och 18 pärlor.

2. Sträckan AB är diameter i en cirkel. Punkterna C och D ligger på cirkeln. Strålarna AC och AD skär tangenten till cirkeln i punkten B i punkter P och Q, respektive. Visa att punkterna C, D, P och Q ligger på en cirkel.

Lösning. Trianglarna ABC och APB är rätvinkliga med gemensam vinkel vid A, och därmed likformiga, och vi har $AC \cdot AP = 4R^2$, där R är cirkelns radie. På samma sätt följer att $AD \cdot AQ = 4R^2$. Trianglarna ACD och AQP är nu likformiga enligt sida-vinkel-sida, och det medför att $\angle PCD + \angle PQD = \angle PCD + \angle DCA = 180°$, vilket betyder att C, D, P, Q ligger på en cirkel.

Notera att påståendet är sant i de degenererade fallen då två eller flera av punkterna A, B, C, D sammanfaller. Detta är uppenbart när C och D sammanfaller, och när C och/eller D sammanfaller med B. När C rör sig mot A växer vinkeln BAC; i gränsfallet då $C = A$ får vi att linjen AC urartar till tangenten till den givna cirkeln i A och punkten P till oändligheten. Punkterna C, D, Q, ∞ ligger då på den räta linjen ADQ, som är en "cirkel" genom ∞.

Vi skissar här en lösning som bygger på inversion och därmed på tanken om att utnyttja den oändliga punkten. Skicka B till ∞. Den givna cirkeln och dess tangent i B avbildas då på två "cirklar", vars enda gemensamma punkt är ∞, det vill säga två parallella linjer. Linjerna AC och AD avbildas på två cirklar, vars skärningspunkter med de två parallella linjerna bildar en rektangel med hörn motsvarigheterna till punkterna C, P, D, Q. Påståendet följer nu ur att en rektangels hörn alltid ligger på en cirkel, samt att cirklar avbildas på cirklar vid transformationen tillbaka. (Läs om inversion samt om Möbiusavbildningar i det komplexa talplanet.)

3. Det står två skålar på ett bord, en vit och en svart. I den vita skålen ligger 2019 kulor. Spelare A och B spelar ett spel där de gör vartannat drag (A börjar). Ett drag består av

- att flytta en eller flera kulor från den ena skålen till den andra, *eller*
- att ta bort en kula från den vita skålen,

med villkoret att den uppkomna positionen (det vill säga antalet kulor i de två skålarna) inte har förekommit tidigare. Den spelare som inte har något giltigt drag att göra förlorar.

Kan någon av spelarna vara säker på att vinna? I så fall vilken?

Lösning. Spelet är ändligt, så för varje startposition har en av spelarna en vinnande strategi. Vi kallar en startposition vinnande (+) om den spelare som börjar har en vinnande strategi. Om det ligger a kulor i den vita skålen och b kulor i den svarta skålen, så betecknar vi motsvarande position med det ordnade paret (a, b).

Vi börjar att studera motsvarande spel med n kulor, där startpositionen är godtycklig.

Fallet $n = 1$: Positionen $(1, 0)$ är vinnande – ta bort kulan i den vita skålen – och positionen $(0, 1)$ är förlorande: det enda tillåtna draget är $(1, 0)$, och spelare B vinner i nästa drag.

Fallet $n = 2$: Positionen $(1, 1)$ är vinnande: ta bort kulan i den vita skålen, vilket sätter spelare B i den förlorande startpositionen $(0, 1)$.

Positionerna $(2, 0)$ och $(0, 2)$ är också vinnande: från $(0, 2)$, spela $(2, 0)$ och vice versa. Spelare B kan därefter bara spela $(1, 1)$ eller $(1, 0)$, vilket är vinnande enligt ovan.

Fallet $n = 3$: Eftersom varje position för $n = 2$ är vinnande, gäller det att undvika ta bort någon kula. Det finns 4 positioner på nivå $n = 3$, det vill säga ett jämnt antal och en position är redan använd. Så länge som spelare B inte tar bort någon kula, kan alltså spelare A fortsätta att göra drag utan att ta bort någon kula. Det blir alltså spelare B som så småningom tvingas att ta bort en kula (eller fastna i position $(0, 3)$) och alla startpositioner är alltså vinnande.

Härifrån kan vi nu generalisera. Antag att $n \equiv 3 \pmod 4$ och att alla positioner är vinnande. Enligt ovan är detta fallet för $n = 3$.

Fallet $n \equiv 0 \pmod 4$ Alla drag som tar bort en kula leder till en vinnande position för den andra spelaren och måste därför undvikas. Det finns $n+1$ (det vill säga ett udda antal) positioner på nivå n och så länge som spelare A inte tar bort någon kula, kan spelare B fortsätta att göra drag utan att ta bort någon kula. Det blir alltså spelare A som så småningom tvingas att ta bort en kula (eller fastna i position $(0, n)$) och alla startpositioner är alltså förlorande.

Fallet $n \equiv 1 \pmod 4$ Alla positioner utom $(0, n)$ är direkt vinnande, genom att ta bort en kula. Från position $(0, n)$ måste man göra ett drag inom nivå n, så den positionen är därför förlorande (i nästa drag tar B bort en kula).

Fallet $n \equiv 2 \pmod 4$ Position $(1, n-1)$ är vinnande: Spela $(0, n-1)$, vilket är förlorande för B enligt ovan. Alla andra drag som tar bort en kula leder till en vinnande position för den andra spelaren och måste därför undvikas. Av samma skäl måste draget $(1, n-1)$ undvikas.

Det återstår n (det vill säga ett jämnt antal) positioner på nivå n och enligt ett motsvarande resonemang som tidigare, så är det spelare B som så småningom tvingas att antigen ta bort en kula, spela $(1, n-1)$ eller fastna i position $(0, n)$. Alla positioner är således vinnande.

Fallet $n \equiv 3 \pmod 4$ Alla drag som tar bort en kula leder till en vinnande position för den andra spelaren och måste därför undvikas. Det finns $n+1$ (det vill säga ett jämnt antal) positioner på nivå n. Återigen ser vi att det blir B som så småningom tvingas att antigen ta bort en kula eller fastna i position $(0, n)$. Alla positioner är således vinnande.

Vi är nu tillbaka i fallet $n \equiv 0 \pmod 4$ med samma startvärde som tidigare, så vi kan upprepa argumentet (egentligen via induktion).

Eftersom $2019 \equiv 3 \pmod 4$ är alla startpositioner vinnande, så i synnerhet vinner spelare A om vi startar spelet i position $(2019, 0)$.

4. Låt Ω vara en cirkelskiva med radie 1. Bestäm det minsta r som har följande egenskap: Det går att välja tre punkter på Ω så att varje cirkelskiva som ligger i Ω och har radie större än r innehåller minst en av de tre punkterna.

Lösning. Låt ρ vara radien i en cirkel Γ som är inskriven i en cirkelsektor till C med vinkel $120°$. Vi har då att $\rho = \dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$, eftersom $(1-\rho)^2 = \rho^2 + \left(\dfrac{1-\rho}{2}\right)^2$.

Vi visar nu att $r = \rho$.

Tag tre godtyckliga punkter på Ω. Om Ω delas in i tre lika stora cirkelsektorer med en av punkterna på den gemensamma randen till två av sektorerna, kommer det att finnas en sektor, säg S, som inte har någon av de tre punkterna i sitt inre. Om $r < \rho$ finns cirklar med radie större än r som får plats i S och därför inte innehåller någon av punkterna. Alltså har vi $r \geq \rho$.

Beteckna med O medelpunkten till Ω. Låt $\gamma = \dfrac{1-\rho}{2}$ =avståndet mellan O och Γ:s (ena) tangeringspunkt med randen till sektorn där den är inskriven, i det inre av Ω. Låt vidare k vara cirkeln med medelpunkt O och radie γ. Observera att $\gamma < \rho$ (ty de är katetlängder i en rätvinklig triangel där ρ har motstående vinkel $60°$). Därför kommer åtminstone en tredjedel av k att innehållas i varje cirkelskiva med radie ρ. Vi kan nu välja de tre punkterna symmetriskt på k för att garantera att varje cirkelskiva med radie större än ρ innehåller minst en av dem. Alltså gäller $r = \rho$.

5. Låt f vara en funktion som är definierad för alla positiva heltal och vars värden är positiva heltal. För f gäller dessutom att $f(n+1) > f(n)$ och $f(f(n)) = 3n$, för varje positivt heltal n. Beräkna $f(2019)$..

Lösning. Följden $f(1), f(2), f(3), \ldots$ är strängt växande. Vidare är $f(1) = 2$ eftersom

$$f(1) = 1 \Rightarrow f(1) = f(f(1)) = 3$$

och

$$f(1) \geq 3 \Rightarrow 3 = f(f(1)) \geq f(3)$$

ger motsägelser. Det gäller att

$$f(1) = 2, f(2) = f(f(1)) = 3, f(3) = f(f(2)) = 6, f(6) = f(f(3)) = 9, \ldots$$

Induktion ger

$$f(3^k) = 2 \cdot 3^k,\ f(2 \cdot 3^k) = 3^{k+1}$$

för $k = 1, 2, 3, \ldots$.
Antag nu att $3^k < n < 2 \cdot 3^k$. Då $f(n)$ är strängt växande måste

$$f(3^k) = 2 \cdot 3^k < f(n) < 3^{k+1} = f(2 \cdot 3^k).$$

Det finns $3^k - 1$ heltal mellan $2 \cdot 3^k$ och 3^{k+1} och också $3^k - 1$ heltal mellan 3^k och $2 \cdot 3^k$. Av detta följer att

$$f(3^k + j) = f(3^k) + j$$

för $j = 1, 2, \ldots, 3^k$. Detta medför att

$$f(2 \cdot 3^k + j) = f(f(3^k + j)) = 3 \cdot (3^k + j) = 3^{k+1} + 3j$$

för $j = 1, 2, \ldots, 3^k$. Då

$$2019 = 2 \cdot 3^6 + 561,\ 561 < 3^6$$

följer att

$$f(2019) = 3^7 + 3 \cdot 561 = 3870.$$

6. Finns det en oändlig följd av positiva heltal $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ som innehåller varje positivt heltal exakt en gång och som är sådan att talet $a_n + a_{n+1}$ är en kvadrat för varje n?

Lösning. Svaret är JA. Vi kommer att konstruera följden induktivt. Vi ska visa att om vi har en ändlig följd av olika positiva heltal som innehåller alla positiva heltal upp till k och är sådan att $a_n + a_{n+1}$ är en kvadrat för alla (aktuella) n, så kan vi förlänga den så att den förlängda följden även innehåller $k + 1$. Sätt $a_1 = 1$ som basfall för induktionen. Nu vill vi förlänga en följd som innehåller alla positiva heltal upp till k till en följd som även innehåller $c = k + 1$. Om $k + 1$ redan finns med är vi klara, annars beteckna med a_m det senast konstruerade elementet och förläng först med ett stort element a, som har samma paritet som k, och som är sådant att $a_m + a$ är en "stor" kvadrat. Talet $a - c = a - k - 1$ är då udda. Sätt $a - c = 2x + 1$. "Stort" betyder här att x^2 är större än summan av c och vilket som helst av talen som fanns med i följden innan vi förlängde med a. Vi sätter $b = (x + 1)^2 - a$, och den förlängda följden kommer att vara $1, \ldots, a_m, a, b, c$, med de tre talen a, b, c i slutet. Vi har $a + b = (x + 1)^2$, och $b + c = (x + 1)^2 - a + c = (x + 1)^2 - (2x + 1) = x^2$, så kvadratvillkoret är uppfyllt. Notera att $b = x^2 + 2x + 1 - a = x^2 - c$ är större än något a_i, så det är ett nytt tal om och endast om $b \neq a$. Men $b = a$ är ekvivalent med $(x + 1)^2 = 2a \quad \Leftrightarrow \quad (a - c + 1)^2 = 8a$, och vi behöver bara se till att undvika det valet.